Prof. Dr. Alfred Toth

Zur Theorie der Relationalzahlen I

1. In Toth (2011) hatten wir gezeigt, dass die Zahl zwar ein Zeichen (und kein Objekt) ist, dass es sich aber auf präsemiotischer und nicht auf semiotischer Stufe befindet und dass die Repräsentation von Quantität ohne Qualität daher ein phylogenetisch älteres Stadium darstellt. Damit ist die abstrakte präsemiotische Zahlenrelation

$ZR(Za) = (3.a\ 2.b\ 1.c\ 0.d)$ mit $a, ..., d \in \{1, 2, 3\}$

mit ihrer dreifachen Unterscheidung

(0.1) ← Kardinalzahl, d.h. Repräsentation als Mächtigkeit

(0.2) ← Ordinalzahl, d.h. Repräsentation als Nachfolge

(0.3) ← Relationalzahl, d.h. Repräsentation als Konnex

tieferliegend als die Peircesche Zeichenrelation ohne eingebettetes relationales Objekt (O°) und befindet sich auf der Ebene der „Nullheit“ (Bense 1975, S. 65 f.) im „präsemiotischen Raum“ (Toth 2007), der zwischen dem „ontologischen Raum“ unterhalb und dem „semiotischen Raum“ oberhalb (Bense 1975, S. 65 f.) angesiedelt ist.

2. Nachdem Kardinal- und Ordinalzahlen seit langer Zeit sowohl in der klassischen (finiten und transfiniten) Mathematik als auch in der Semiotik besonders von Bense und mir ausführlich untersucht wurden und noch werden, sollen in dem vorliegenden Beitrag erstmals die von Bense entdeckten Relationalzahlen untersucht werden. Im folgenden werden wir uns der Struktur des Körpers der natürlichen Zahlen widmen.

2.1. Reihung und Bündelung

Betrachten wir die natürlichen Zahlen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ..., 19, 20, 30, 40, ..., 90, 100, 1000 ...$

In ℕ gilt für jede Zahl x ≥ 1:

σx = x+1,

und dieser Nachfolgeoperator garantiert das unendliche Fortschreiten auf der Zahlengerade jeweils um eine natürliche Zahl, denn es gelten die 5 Peano-Axiome (Oberschelp 1976, S. 16)_

P 1 $0 \in \mathbb{N}.$

P 2 $N(k) \in \mathbb{N}.$

P 3 $N(k) \neq 0.$

P 4 $k \neq l \Rightarrow N(k) \neq N(l).$

P 5 $0 \in A \wedge \forall k (k \in A \Rightarrow N(k) \in A) \Rightarrow \forall k (k \in A).$

Das ist also, was wir die **Reihung** der natürlichen Zahlen nennen. Wenn wir jedoch mit ihnen rechnen, bündeln wir sie in Zehner, denn benutzen zu ihrer Darstellung der 10er-System:

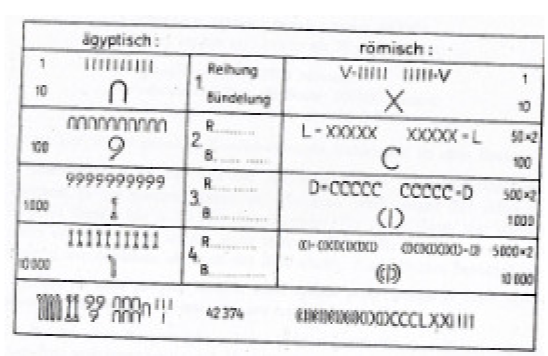
$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1´000$, usw.

Menninger (1958, S. 53) bringt als alternatives Beispiel für **Bündelung** die Bilderzahlschrift der Altägypter:

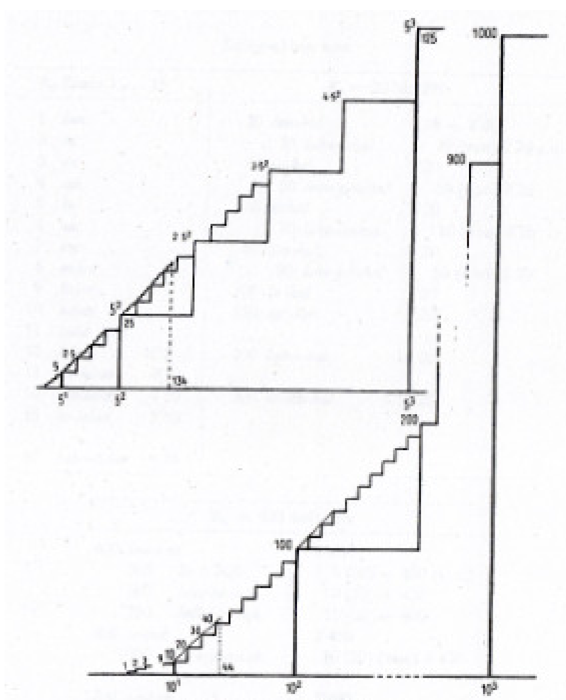


Wie Menninger feststellte, sind „alle Massordnungen Bündelungen in aufsteigender Ordnung" (1958, S. 52)

60 Sek. = 1 Min.
60 Min. = 1 Std.
24 Std. = 1 Tg.
30 Tg. = 1 Mon.
12 Mon. = 1 J.

2.2. Stufung

Menninger spricht von einer „Zähltreppe": „Während man beim Zählen das Gefühl hat, eine Treppe hinaufzusteigen: 1, 2, 3, ..., 9, 10 – so, hier ist ein Absatz (...). Dann geht es wieder weiter: 11, 12, ..., 19, 20, wieder ein Absatz. Und so klettert man immer höher den Turm hinauf (...). Die Zählreihe ist gestuft: Das erreicht sie durch die Benennung der Reihenglieder; diese stehen nicht mehr namenlos und gleichwertig nebeneinander, sondern bilden die Stufen einer Treppe: sieben ist ´höher´ als drei" (1958, S. 56 f.). Vgl. dazu die folgende Illustration aus Menninger (1958, S. 69):



Die 5- und die 10-Stufung
Die Rangschwellen 5^1, 5^2, 5^3 und 10^1, 10^2, 10^3 stehen auf dem ‚Boden'. Auf jeder Stufe laufen immer die des vorhergehenden Ranges ab. Dargestellt ist in beiden die Zahl 44:
$1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 134$ $4 \cdot 10 + 4 = 44$.

Zur **Stufung** der Zahlzeichen sind hier zwei Besonderheiten zu erwähnen:

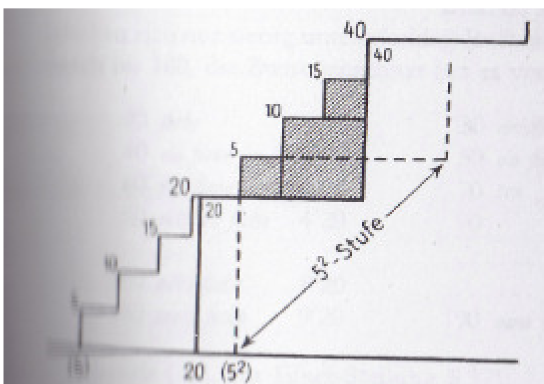
1. Die regressive Zählweise vor einer Stufung, vgl.

lat. un-de-viginti (1 aus 20 = 19), duodevigimti (2 aus 20 = 18)

griech. δυοῖν δέοντες ἑξέκοντα „an zweien ermangelnd 60 = 58“

2. Die von Menninger (1958, S. 94) so genannte „Verzifferung“, d.h. die Verwendung etymologisch nicht zusammenhängender Bezeichnungen für Zehnerpotenzen, z.B. türk. 2/20: iki/yirmi, 3/30: üç/otuz; 4/40: dört/kırk; 5/50: beş/elli.

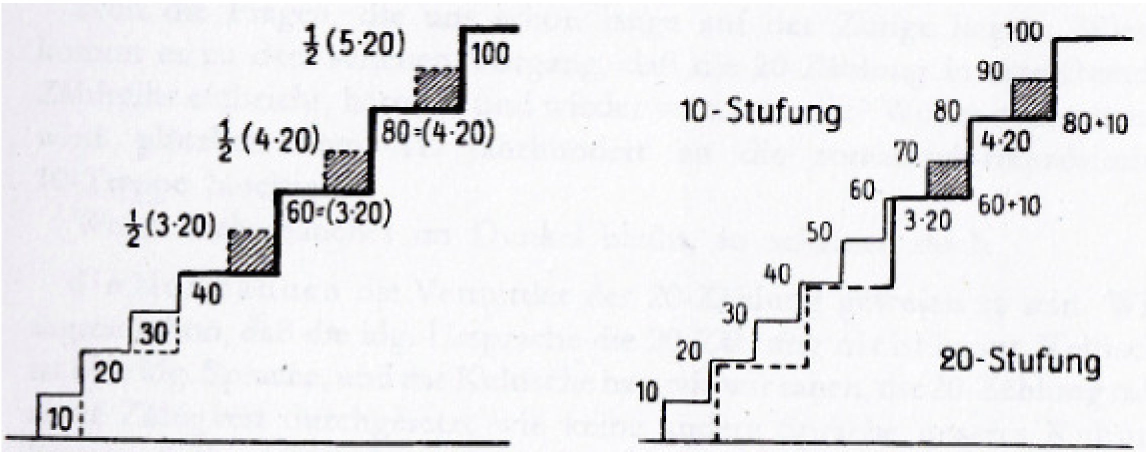
Das folgende Bild aus Menninger (1958, S. 74) gibt die altmexikanische 20-Stufung:



Altmexikanische 20-Stufung

... Treppe bis 20, die sich von dort einfach nur ... 20-Stufen hineinstellt. Daß sie keine 5-Stu-... zeigt die gestrichelte Treppe, die als 2. Rang-... ausgezeichnet sein müßte. An ihrer Stelle herrscht eindeutig die 20-Stufung.

und das nachstehende den Vergleich der Halb-Stufen der dänischen 20-er Treppe mit dem Druchbruch der 20-Treppe in der französischen 10-Stufung:



Die Halb-Stufen auf der dänischen 20-Treppe

Durchbruch der 20-Treppe in der französischen 10-Stufung

Reihung, Bündelung und Stufung erweisen sich somit als semiotische Mittel, um die natürlichen Zahlen als präsemiotische Relationen in Teilkonnexe zu unterteilen. Sie betreffen damit natürlich die Relationalzahlen.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Menninger, Karl, Zahlwort und Ziffer. Göttingen 1958

Oberschelp, Arnold, Aufbau des Zahlensystems. 3. Aufl. Göttingen 1976

Toth, Alfred, Semiotics and Pre-Semiotics. 2 Bde. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Menningers "haftende Zählreihe". In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

13.4.2011